<u>מבחן במתמטיקה דיסקרטית (80181)</u>
מועד א' תשס"ו

המורים: פרופ' רות לורנס-נאימרק **משך הבחינה: 3 שעות**
פרופ' מיכה א. פרלס

<u>הוראות כלליות:</u>

<u>נא למלא</u>: מספר זהות

מספר מחברת ______

נא לענות על כל השאלות <u>בגוף השאלון</u>. המחברת המצורפת מיועדת לטיוטות בלבד, אך יש להגיש גם אותה. ניתן לרשום כתשובות ביטויים מספריים (כגון מקדמים בינומיים), גם מבלי לחשב את ערכם המפורש.
אין להשתמש בחומר עזר כלשהו (כולל ספרים, חוברות, רשימות, פתקים, מחשבונים וטלפונים ניידים).
נא להקפיד על כתב ברור ועל ניסוח בהיר.

<u>מבנה המבחן</u>
במבחן שלושה פרקים. בפרק הראשון יש לענות על שאלה אחת (מתוך שתיים). ציון מרבי: 20.
בפרק השני יש לענות על שמונה שאלות קצרות. ציון מרבי: 40 (שמונה פעמים חמש).
בפרק השלישי יש לבחור תשובה נכונה לשמונה שאלות. ציון מרבי: 40 (שמונה פעמים חמש).
פרטים נוספים – בראשי הפרקים.

<u>פרק ראשון</u>: ענה על <u>אחת</u> משתי השאלות הבאות. (לא על שתיהן!) רשום את תשובתך בהמשך הדף.

I א. מתי נאמר ששתי קבוצות A, B שוות $(A=B)$?

ב. הוכח את הזהות $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

II. רשום <u>שתי</u> הוכחות לזהות

$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ עבור $1\le k\le n$.

<u>שאלה I:</u>

א. שתי קבוצות A, B תקראנה <u>שוות</u> אם ורק אם יש להן בדיוק אותם איברים.

כלומר, אם כל איבר של A הוא גם איבר של B, ולהיפך.

ב. נוכיח את הזהות תוך שימוש בזהויות שנלמדו בשיעור ובחוקי דה-מורגן:

$$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)=\left(A\cup(B\cap A^c)\right)\cap\left(B^c\cup(B\cap A^c)\right)=$$
$$=(A\cup B)\cap(A\cup A^c)\cap(B^c\cup B)\cap(B^c\cup A^c)=(A\cup B)\cap(B^c\cup A^c)=$$
$$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

(יש לציין בכל אחד מהשוויונות את החוק המתאים שבו השתמשנו).

<u>שאלה II:</u>

<u>הוכחה אלגברית:</u>

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k+1)!}(k+n-k+1)=$$
$$=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}$$

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

נספור את מספר תת-הקבוצות בגודל k של $\{1,\dots,n+1\}$ בשתי דרכים שונות.

בדרך הישירה, ודאי שמספרן הוא $\binom{n+1}{k}$.

בדרך השניה, עבור תת-קבוצה A בגודל k של $\{1,\dots,n+1\}$, או ש-$n+1\in A$ או ש-$n+1\notin A$.

מספר תת-הקבוצות בגודל k של $\{1,\dots,n+1\}$ שמכילות את $n+1$, הוא $\binom{n}{k-1}$

(כי עלינו לבחור $k-1$ איברים מתוך $\{1,\dots,n\}$).

מספר תת-הקבוצות בגודל k של $\{1,\dots,n+1\}$ שאינן מכילות את $n+1$, הוא $\binom{n}{k}$

(כי עלינו לבחור k איברים מתוך $\{1,\dots,n\}$).

פרק שני – X-III. רשום את התשובה לכל שאלה על הקו.

III. תהא $f: X \to Y$ פונקציה, ותהא A תת-קבוצה של X, B תת-קבוצה של Y.
פשט את שני הביטויים הבאים

$$A \cap f^{-1}\left(f\left(A\right)\right) = \underline{A}.$$

$$B \cap f\left(f^{-1}\left(Y \setminus B\right)\right) = \underline{\Phi}.$$

IV. נניח $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. יהא S אוסף כל היחסים הדו-מקומיים (=בינאריים) R על A שהם <u>סימטריים</u> ומקיימים $1R3$. אזי

$$|\mathrm{S}| = \underline{2^{54}}.$$

V. חשב את הביטוי הבא (עבור $n \ge 2$):

$$\sum_{k=0}^{n} k\left(k-1\right)\binom{n}{k} = \underline{n(n-1)2^{n-2}}.$$

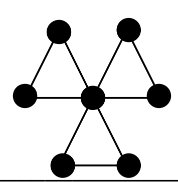
VI. מספר השלשות $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ של מספרים שלמים המקיימות:

$x_1 + x_2 + x_3 = 14$, וכן $0 \le x_i \le 6$ עבור $i = 1,2,3$,

הוא $\underline{15}$.

VII. כמה מן המספרים $1,2,3,\ldots,199,200$ זרים למספר 200? (שני מספרים שלמים חיוביים הם <u>זרים</u> אם אין להם מחלק משותף גדול מ-1.) $\underline{\Phi(200) = 80}$

VIII. צייר גרף בעל שבעה קדקודים, שיש בו מעגל של EULER, אך אין בו מסילת HAMILTON.



IX. יהא T עץ בעל n קדקודים, $4 \le n < \infty$.
נניח שב- T יש בדיוק שלושה קדקודי קצה (=קדקודים חד-ערכיים=עלים). מה הן הערכויות (=דרגות) של יתר קדקודי T?
<u>יש קדקוד אחד מדרגה 3, שאר הקדקודים הם מדרגה 2.</u>

X. הסדרה $\left(a_n\right)_{n=0}^{\infty}$ מוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה $a_{n+2} = a_{n+1} + 20a_n$, עם תנאי ההתחלה $a_0 = 2,\ a_1 = 1$. רשום ביטוי מפורש ל- a_n.

$$a_n = \underline{5^n + (-4)^n}.$$

פרק שלישי- שאלות XI- XVII

בחלק זה שמונה שאלות. סמן ליד כל שאלה את התשובה הנכונה (א/ ב/ ג/ ד לחמש השאלות הראשונות, נכון/לא נכון לשלוש האחרונות). נא להקיף בעיגול את האות המתאימה לתשובה הנכונה.

הניקוד בפרק זה:

5 נקודות על תשובה נכונה

0 נקודות על אי-מתן תשובה

2- (מינוס שתיים) נקודות על תשובה שגויה

הטענות הנכונות מסומנות כך.

XI. איזו מן הטענות הבאות נכונה?

א. אם $f,g: X \to Y$ הן פונקציות חד-חד-ערכיות, ואם f מעתיקה את X על Y, אזי גם g מעתיקה את X על Y.

ב. קיימת קבוצה X שעבורה יש העתקה f של X על $P(X)$. ($P(X)$ הוא אוסף כל התת-קבוצות של X.)

ג. תהיינה P,Q,X,Y קבוצות.
אם יש העתקה חד-חד-ערכית של P על Q, וגם העתקה חד-חד-ערכית של X על Y, אזי קיימת העתקה חד-חד-ערכית של $P \cap X$ על $Q \cap Y$.

ד. תהא $f: X \to Y$ העתקה חד-חד-ערכית של X על Y.
אזי קיימת פונקציה $g: Y \to X$, כך שההרכבה $g \circ f$ היא העתקת הזהות של X, וההרכבה $f \circ g$ היא העתקת הזהות של Y.

XII. מהו המעריך של החזקה הגבוהה ביותר של 2 המחלקת את המקדם הבינומי $\binom{80}{40}$?

(כלומר, $\max\left\{k : 2^k \middle| \binom{80}{40}\right\}$.)

א. 1

ב. 2

ג. 4

ד. 8

XIII. לפניך שלוש טענות לגבי מספרי CATALAN C_n $\left(C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\right)$:

1. מספר השילושים של מצולע קמור מסדר n $(n\geq 3)$ ע"י אלכסונים שאינם נחתכים בפנים המצולע הוא C_{n-2}.
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{n!/e}=1$.
3. $C_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k}$.

כמה מן הטענות הנ"ל נכונות?

א. אף לא אחת.
ב. אחת בדיוק.
ג. שתיים בדיוק.
ד. כולן.

XIV. תהא V קבוצה בת n קדקודים, ויהא v_0 איבר מסויים של V. מספר העצים על V שבהם v_0 הוא קדקוד קצה (=קדקוד חד-ערכי=עלה) הוא:

א. $(n-2)^{n-1}$
ב. $(n-1)^{n-3}$
ג. $(n-1)^{n-2}$
ד. n^{n-3}

XV. לפניך שלוש טענות:

1. כל סדרה של 100 מספרים ממשיים שונים מכילה תת-סדרה מונוטונית באורך 10.
2. כל סדרה של 400 מספרים ממשיים מכילה תת-סדרה לא יורדת באורך 20.
3. כל סדרה של 100 מספרים ממשיים שונים מכילה תת-סדרה עולה באורך 10 <u>או</u> תת-סדרה יורדת באורך 12.

כמה מן הטענות הנ"ל נכונות?

א. אף לא אחת.
ב. אחת בדיוק.
ג. שתיים בדיוק.
ד. כולן.

XVI. תהא N קבוצה בת 11 איברים (בית"ר י-ם).

עבור $0 \le k \le 11$ נסמן ב- $P_k(N)$ את אוסף כל התת-קבוצות בנות k איברים של N. $\left(P_k(N)=\{K \subset N : |K|=k\}\right)$.

האם הטענה הבאה נכונה?

,, יש העתקה חד-חד-ערכית f של $P_5(N)$ על $P_6(N)$, כך ש-$S \subset f(S)$ לכל $S \in P_5(N)$".

<u>נכון</u>

(מחק את המיותר)

XVII. ,,בכל צביעה של צלעות גרף שלם על מיליון קדקודים בשני צבעים יימצאו עשרה קדקודים, שכל הצלעות שביניהם צבועות באותו צבע".

<u>נכון</u>

(מחק את המיותר)

XVIII. ,,בכל צביעה של צלעות גרף שלם על מיליון קדקודים בשני צבעים יימצאו ארבעים קדקודים, שכל הצלעות ביניהם צבועות באותו צבע "

<u>לא נכון</u>

(מחק את המיותר)

בהצלחה!

<u>מבחן במתמטיקה דיסקרטית (80181)</u>
מועד ב' תשס"ו

המורים: פרופ' רות לורנס-נאימרק **משך הבחינה: 3 שעות**
פרופ' מיכה א. פרלס

<u>הוראות כלליות:</u>

<u>נא למלא</u>: מספר זהות

מספר מחברת ______

נא לענות על כל השאלות <u>בגוף השאלון</u>. המחברת המצורפת מיועדת לטיוטות בלבד, אך יש להגיש גם אותה. ניתן לרשום כתשובות ביטויים מספריים (כגון מקדמים בינומיים), גם מבלי לחשב את ערכם המפורש.
אין להשתמש בחומר עזר כלשהו (כולל ספרים, חוברות, רשימות, פתקים, מחשבונים וטלפונים ניידים).
נא להקפיד על כתב ברור ועל ניסוח בהיר.

<u>מבנה המבחן</u>
במבחן שלושה פרקים. בפרק הראשון יש לענות על שאלה אחת (מתוך שתיים). ציון מרבי: 20.
בפרק השני יש לענות על שמונה שאלות קצרות. ציון מרבי: 40 (שמונה פעמים חמש).
בפרק השלישי יש לבחור תשובה נכונה לשמונה שאלות. ציון מרבי: 40 (שמונה פעמים חמש).
פרטים נוספים – בראשי הפרקים.

פרק ראשון: ענה על אחת משתי השאלות הבאות. (לא על שתיהן!) רשום את תשובתך בהמשך הדף.

I. תהי $f : X \to Y$ פונקציה. הוכח או הפרך:

א. לכל $A, B \subset X$, $f\left(A \cap B\right) = f\left(A\right) \cap f\left(B\right)$.

ב. לכל $C, D \subset Y$, $f^{-1}\left(C \cup D\right) = f^{-1}\left(C\right) \cup f^{-1}\left(D\right)$.

II. א. צייר עץ על 6 קדקודים $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ שבו לקדקודים x_3, x_5 ערכיות 3 וליתר הקדקודים ערכיות 1.

ב. האם יש עץ יחיד המקיים את הדרישות לעיל? הסבר.

שאלה I:

א. לא נכון.

דוגמא נגדית: $A = [0,1],\ B = [-1,0]$ ו- $\forall x : f(x) = |x|$. אזי:

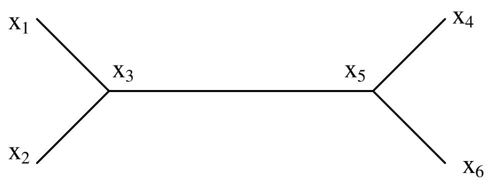
$$0 = f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) = [0,1]$$

ב. נכון.

הוכחה: $x \in f^{-1}(C \cup D) \Leftrightarrow f(x) \in C \cup D \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ (נמקו!).

שאלה II:

א. ציור:



ב. אין עץ יחיד המקיים את הדרישות הנ"ל. ליתר דיוק, יש 6 עצים מתוייגים המקיימים אותן! (למה?)

<u>פרק שני – X-III</u>. רשום את התשובה לכל שאלה על הקו.

III. הפעולה Δ על קבוצות מוגדרת ע"י

$A\Delta B=\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right)=\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right)$.

חשב במפורש את הקבוצה

$\{1,3,4,5,9\}\Delta\{2,3,6,7,8\}\Delta\{3,4,6,7,9\}$ = $\underline{\{1,2,3,5,8\}}$

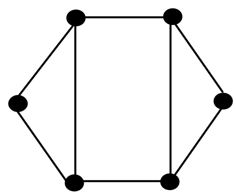
IV. נסמן: $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. יהא S אוסף כל יחסי השקילות R על A שבהם אחת ממחלקות השקילות היא $\{1,3,5,7,9\}$. אזי

$|S|=\underline{15}$.

V. חשב את הביטוי הבא (עבור $0\le k\le n$):

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}=\underline{\binom{n}{k}2^{n-k}}.$$

VI. צייר גרף בעל שישה קדקודים שיש בו מעגל HAMILTON ואין בו מסילת EULER.



VII. תהא $V=\{x_1,...,x_{10}\}$ קבוצה בת 10 קדקודים.

יהא S אוסף כל העצים על V שיש להם בדיוק שלושה קדקודי קצה (עלים).

אזי $|S|=\underline{10\cdot\binom{9}{3}\cdot\frac{8!}{2}}$.

VIII. מזכירה מדפיסה שבעה מכתבים (למכותבים שונים), ושבע מעטפות מתאימות. בסוף היום היא עייפה ושמה את המכתבים במעטפות באקראי (מכתבים שונים במעטפות שונות).

א. מהו מספר האפשרויות לעשות זאת? $\underline{7!=5040}$

ב. מהו מספר האפשרויות שבהן יגיע לפחות מכתב אחד לתעודתו?

$\underline{7!\sum_{i=0}^{7}(-1)^i\frac{1}{i!}}$

IX. הסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ מוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה $a_{n+2}=8a_n-2a_{n+1}$

עם תנאי ההתחלה $a_0=3,\ a_1=0$. רשום ביטוי מפורש ל- a_n.

$$\underline{a_n=2^{n+1}+(-4)^n}$$

X. בבחירות לראשות הועד השתתפו 100 בוחרים. המועמד המנצח קיבל 60 קולות, והמפסיד 40.

א. מהו מספר הסידורים האפשריים של פתקי ההצבעה?

$$\underline{\binom{100}{40}=\binom{100}{60}}$$

ב. מהו מספר הסידורים שבהם המועמד המנצח מוביל ממש במשך כל מניית הקולות?

$$\underline{\frac{20}{100}\binom{100}{60}}$$

<u>פרק שלישי- שאלות XI- XVII</u>

בחלק זה שמונה שאלות. סמן ליד כל שאלה את התשובה הנכונה (נכון/לא נכון לשאלה XII , א/ב/ג/ד ליתר השאלות). נא להקיף בעיגול את האות המתאימה לתשובה הנכונה.

הניקוד בפרק זה:

5 נקודות על תשובה נכונה

0 נקודות על אי-מתן תשובה

-2 (מינוס שתיים) נקודות על תשובה שגויה

התשובות הנכונות מסומנות כך.

XI. תהא $f:A\to B$ פונקציה.

איזו מן הטענות הבאות <u>אינה נכונה</u>?

א. אם f חד-חד-ערכית, ואם $Y\subset B$, אזי $\left|f^{-}(Y)\right|\le|Y|$.

ב. אם f חד-חד-ערכית, ואם $X\subset A$, אזי $\left|f(X)\right|=|X|$.

ג. אם f מעתיקה את A <u>על</u> B , ואם $Y\subset B$, אזי $\left|f^{-}(Y)\right|\ge|Y|$.

ד. אם f מעתיקה את A <u>על</u> B , ואם $X\subset A$, אזי $\left|f(X)\right|=|X|$.

XII. האם האי-שוויון הבא נכון?

$$\binom{80}{20}<4^{10}\cdot 7^{10}$$

<u>**לא נכון**</u>

(מחק את המיותר)

XIII. מהו מספר הסדרות (X,Y,Z,W) של מספרים שלמים אי-שליליים המקיימות:

$X+Y+Z+W=30$, וכן $W \le 3$, $Z \le 2$, $Y \ge 3$.

א. $\binom{25}{3}$

ב. $\binom{31}{4}-\binom{28}{4}+\binom{27}{4}-\binom{24}{4}$

ג. $\binom{24}{3}$

ד. $\binom{30}{3}-\binom{27}{3}-\binom{26}{3}+\binom{23}{3}$

XIV. לפניך שלוש טענות.

אם נצבע את צלעות הגרף השלם K_{17} בשלושה צבעים (אדום, כחול וצהוב) – כל צלע בצבע אחד, אזי:

1. מובטח שיופיע משולש חד-צבעי כלשהו.
2. ייתכן שיימצאו שבעה קדקודים שכל הצלעות המחברות אותם אדומות, ושבעה קדקודים שכל הצלעות המחברות אותם כחולות, ושבעה קדקודים שכל הצלעות המחברות אותם צהובות.
3. מובטח שיופיע משולש תלת-צבעי (צלע אחת אדומה, אחת כחולה ואחת צהובה).

כמה מן הטענות האלה נכונות?

א. 0 ב. 1 ג. 2 ד. 3

XV. כמה סדרות באורך 10 ניתן להרכיב מן הספרות 0 ו-1 מבלי שיכילו שני מופעים רצופים של הספרה 1? (0010001010 מותר, 0110101000 אסור.)

א. 144 (מספר פיבונאצ'י ה-10)

ב. 256

ג. $\sum_{i=0}^{10}(-1)^i 2^{10-i}$

ד. $\sum_{k=0}^{10}(-1)^k \frac{10!}{k!}$

XVI. מספרי CATALAN $\left(C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\right)$ מקיימים אחת מנוסחות הנסיגה הרשומות להלן. סמן את נוסחת הנסיגה הנכונה.

א. $C_{n+2} = C_{n+1} + C_n$

ב. $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}C_0$

ג. $C_n = {C_{n-1}}^2 + {C_{n-2}}^2$

ד. $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} C_k$

XVII. עיין במספר $15120 = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7$

סכום המחלקים (השלמים החיוביים) של המספר הזה (כולל המספר עצמו והמספר 1) גדול ממספר המחלקים שלו פי:

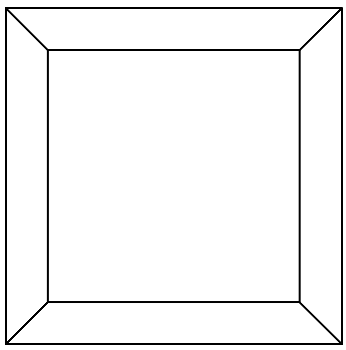
א. 119

ב. 436

ג. 744 $\left(\frac{(1+2+4+8+16)(1+3+9+27)(1+5)(1+7)}{5\cdot 4\cdot 2\cdot 2}\right) =$

ד. 1012

XVIII. עיין בגרף של הקוביה התלת-ממדית (ראה ציור).



מהו מספר מעגלי HAMILTON בגרף הזה?

(שים לב: מעגל נשאר אותו מעגל אם מתחילים לצייר אותו מקדקוד אחר, או שהולכים לאורכו אחורנית).

א. 0

ב. 3

ג. 6

ד. 12

בהצלחה!