

בשנת שנתנו ראינו שישוי אשקל נאש הוא לא נהנה אופטימלי.
 (נתמוך על המשחק הבא:

	L	R
U	3,3	0,7
D	7,0	1,1

ישוי המשך החיזק ראן (U) הוא (D, R) כי יש אף שחקן לא ירצה
 לשפר את המצב שלו י' שני ההחלטה שלו טובה.
 המצב הזה הוא כמובן לא יציב. ברור שצדף אישניהם יקבלו (3,3)
 ואילו במצב (0,7) הם שפוי משמעותי לשחקן היציב אכן הרצה
 לשחקן השני. האם זה יציב חברתי? תלוי אק אנתנו מחזירים
 או לא...

הגדרה: פרופל הוא יציב פארטו (Pareto) אם לא קיים פרופל
 אחר שבו לפחות שחקן אחד טוב יותר, בעוד אף שחקן אינו גרוע.
 זו הגדרה טובה למקרה שאין משמעות למספרים אלא מה שמעניין אותנו
 יותר הוא יחס הוסדר ביניהם.

למה יצא למספרים שלנו כן יש משמעות. (הצב המצב (7,0) הוא
 יציב חברתי? צדין לא ברור. צדק אגדיר פונקציה מטרה חברתית
 אלו מצפים ירחים אצנין אותנו?

- הוויכוח (אק מחזירה מהמסוג?)
- סכום התועלות של השחקנים ("רווחה חברתית" - Social welfare)
- מקסימום - חומימא - חוצים להתפלג - הוויכוח תפיה מקטגוריה

אצלנו יש לנו מטרה חברתית. זהו צדק צדק, טוב, טוב אחר כמה
 מצב טוב הוא לא יציב. בשנים האחרונות מקובל להשתמש סכום
 נגדיר חוסר יעילות של פרופל כחס. בין פונקציה המטרה במצב
 האופטימלי למין אק פונקציה המטרה הפרופל שלנו.

זרעו אחריו יתאים להיבד כמה שיווי משקל נאש פחות יעיל מהאופטימום.
 אבל נכחו שיתאים להיות כמה שיווי נאש.

$$PoA = \text{Price of Anarchy} = \frac{\text{עלוה כשנאש היצוד ביותר}}{\text{עלוה באופטימום}}$$

כדי וכו' ירדו שרתו להיות - ה - worst case - זה משנה
 שנתה להסתב עליו במדע החתלה, נפי' ארמת יעילת.
 אחיר והאנרכיה מנסה ארמת כמה העדמ מתקנה לאופטימום החברתי.
 נה' ש - PoA מתקנה ל-1 אנתנו במדע אם יותר.

הצה: שנה נאש אפשר רק על סכיוו לשתן השחקן משנה אג דעתו לוקאלי-
 והשתקנים לא מתאמים זמירו. חקן כשמה שלנו זאל שחקן אין רציון
 לעבור לעמדה אחרת. המלא יתאים לתאם זמירו לעבור יחד ל- (3,3).

זוף הערה: אחיר והאנרכיה רחונטי רק אם שיווי משקל נאש קיים. יתר על כן,
 אפשרו אם הוא קיים לא מסוים קיימת דני אטיקה הסתמי שנתה או-
 הסתמרת לשיווי משקל הנה. ייתכן שהמחצה למחצה הנה יורר זרעו
 מהמחצה הנל.

אפשר אחרת היא ארסתם דוקא על המקרה הטוב ביותר - אחיר הויכוח

$$PoS = \text{Price of Stability} = \frac{\text{עלוה כשנאש הטוב ביותר}}{\text{עלוה באופטימום}}$$

(זה מה רמאן רחונטי רק אם יש שנה נאש)

דוקא מת' מחלטים הנה פעמים אפשרים על אחיר הויכוח. * אג הפרוטוקול
 כדאי לתכנן רק שהשתקנים יעלו לשיווי משקל, אבל כווצאי נודים להמלא
 אדם לשיווי משקל הטוב ביותר.

(Rosenthal 73) משתקי חזית (Congestion Games)

יש קבוצת משתמים E

קבוצה ח שתקנים. אופס האסטרטגיה של שחקן i הוא
 (אופס של התי קבוצה של E).

$$S_i \subseteq 2^E$$

6

$$C_e: N \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{נגזר פונקציה על } N \\ x_e \mapsto C_e(x_e)$$

כאשר $x_e =$ מספר השחקנים שמשתמשים במסלול

$$c_i(s) = \sum_{e \in S_i} C_e(x_e) \quad \text{כזה נותן אהדור פונקציה על } S_i \text{ - מסלול } i \\ \downarrow \\ \text{מסלול} \quad \text{הפול של שחקן מושגת משחקים אחרים -}$$

אכחזה האנשים שמחו זהשתמש במסלולים

משל, כולם, כולם תחבורה ב צד (ב דוים) הוא משאב ואסטרטגיה של שחקן היא מסלול שהוא מותר לנסות בו. כמו שראינו השיעור הקודם האחרים של האסטרטגים תלויים גם בהחלטות של שחקנים אחרים פונקציה המסרה יחולה להיות הלחץ שלוקח אהדור אההתחלה לסוף - סכום הפול של המשאבים האסטרטגיה של השחקן.

משחק פוטנציאל (Monderer & Shapley, 96)

הגדרה: משחק G הינו משחק פוטנציאל אזינוק אם קיימת פונקציה

$$\phi: S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$c_i(s_i, s_{-i}) - c_i(s'_i, s_{-i}) = \phi(s_i, s_{-i}) - \phi(s'_i, s_{-i})$$

(שימו לב! הדגשן פה הוא על ϕ - אינפסיור ולא מודעה של שחקן)

הגדרה: משחק G הינו משחק פוטנציאל אזינוק אם קיימת פונקציה

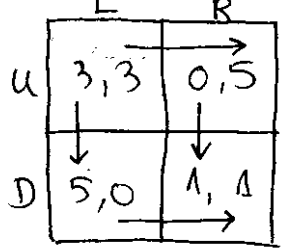
$$\phi: S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$c_i(s_i, s_{-i}) - c_i(s'_i, s_{-i}) > 0 \iff \phi(s_i, s_{-i}) - \phi(s'_i, s_{-i}) > 0$$

במקרה זה נרשם חלש יותר - רק חוזים על ϕ גשטר סדר.

שאלה: האם זה משחק פוטנציאל?

חצי מסתמך שיעור של שחקן. אין מנייה, שזה נחמד. ובגלל שב החיזים החזקים ראוי כיוון יש תחילה שגבש אהנו פונקציה פוטנציאל.



נסה.

$$\begin{aligned}
x &= \phi(u, L) = 2 && // \text{ התאמה שרירותית} \\
x+2 &= \phi(D, L) = 4 && // \text{ כי ציניק אלוה כ-4} \\
x+2 &= \phi(u, R) = 4 \\
x+3 &= \phi(D, R) = 5 && // \text{ כי יש אלוה כ-1 מ-(u, R)}
\end{aligned}$$

יפה! הצלחנו למנוע פוקציות פוטנציאל ארוכות!

	④	②
3,3		0,5
	③	①
5,0		2,1

הצורה: אם הטבלה הייתה

אז אי אפשר היה לעשות פוטנציאל ארוך כי לקוחים ראו קודם היו מכינים אותנו!

$$\begin{aligned}
\phi(1) &= x \\
\phi(3) &= x+2 \\
\phi(2) &= x+2 \\
\phi(4) &= x+3
\end{aligned}$$

אם מחזיקי מ-2 ו-4 יש שפר של 2 אז היה צניק $\phi(4) = x+4$ אז קיבלנו סתירה. אי אפשר פוטנציאל ארוך אלא קיבלנו פוטנציאל ארוך.

אפשר: אם משהו פוטנציאל קיים שזה נאם. תורתנו יוני S הפופול שמיא למניחים את פוקציות הפוטנציאל. אזי S הוא שם נאם.

לניח השווה ש-S אינה בשם. אזי קיים שתקן i בק S -

$$c_i(s_i', s_{-i}) < c_i(s_i, s_{-i})$$

$$\text{למניחים} \quad \phi(s_i', s_{-i}) < \phi(s_i, s_{-i}) \quad \Leftarrow \quad \phi(s) \text{ של}$$

☺

(שם איתנו)
 כגודל של
 שיתן בידינו (כפי)
 זמין ימים א
 (השורש של)

7

משפט: ב משתק עומס תינו משתק פוטנציאל אפויק.

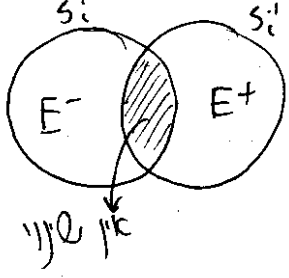
הוכחה: צייק אמצע פוקציה ϕ שמקיימת את התכונה

$$c_i(s_i, s_{-i}) - c_i(s'_i, s_{-i}) = \phi(s_i, s_{-i}) - \phi(s'_i, s_{-i})$$

(תסומ ב ϕ שמשל. מה קרה כשחקן עובר מ s_i ל s'_i ?

קרוה המשלמים שלו משתנה. (נסמן ב E^+ אר קרוה המשלמים

החדשים, וב- E^- את המשלמים שהוא פקרא משלמים בהם.



השבור על החוק לא השתנה.

$$\sum_{e \in E^+} c_e(x_{e+1}) - E^+ \text{ על אר } E^+$$

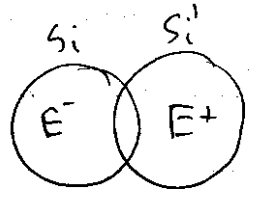
כי עשויים הוא משלמים

$$\sum_{e \in E^-} c_e(x_e) - E^- \text{ על אר } E^-$$

$$c_i(s_i, s_{-i}) - c_i(s'_i, s_{-i}) = \sum_{e \in E^+} c_e(x_{e+1}) - \sum_{e \in E^-} c_e(x_e)$$

אנחנו רוצים לרר יורה שורה אחרים ב- ϕ כל (צ' צ' יר

$$\phi(s) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{x_e} c_e(j)$$



מה קרה במחקר מ- s_i ל s'_i ? שום יש אנו

$$\sum_{e \in E^+} c_e(x_{e+1}) \text{ וירר } \sum_{e \in E^-} c_e(x_e)$$

וכה כציוק מה שרצונו!

8

מסקנה: אר משתק עומס יש שיו משתק נאל אר ב המשלמים שרצונו אר

קדם הם האונטיים.

(כאה מקרה פתי שלו הו ארמש שר המשלמים עומס. קפירושו יש

אזכורים פתינומאלי ארמש.

יש גרף $G=(V, E)$ מכון. אר משתק יש קצתו אר וקצתו ירר. (ו, c_i)

אר קלמיש אחיר שתאי כעומס - $c_e(x_e)$ וכו פוק' אונטיוני-

נניח עור למשתק סמטרי, סומר $s_i = s_j$ אר ניו. זא הסמטריאלי-

ש ב השתקים רהור.

בעיה - min-cost flow יש גרף $G = (V, E)$ עם קשתות שני מסופינים:

e : c_e - capacity

p_e - פארם יחידה

יש n יחידות תחבורה שצריכה לעבור מ- s ל- t ואנחנו

רוצים להבטיח את סכום הקלוויד של s והמסלולים שבתוכם.

יחד לארבעה הולדת אפילו אפילו הכתוב פולינומיאלית.

(שומע הלוך רצי אפילו את הבעיה שלנו.)

בעיה המקורית שלנו עם צדד שהמחיר שלה $C_e(x_e)$ (שם n

פזמים ולא שפלו j נוימ אחרי $C_e(j)$ capacity-1.

אם פרופיל אומר של אקסטרמלית בעיה המקורית מתורגמת

לפלו $\sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{x_e} C_e(j)$ (כי אם צדדים x_e בצדד מסוימת

מתקיימת אס אתרי השפול א s בצדד משופלת יוו) אפילו רק שוקן

אחד. אם הם צדדים מחזור $C_e(1) + \dots + C_e(x_e)$ ואם צדדים

סכום C_e (הצדד).

אם הדימוי הזה הוא בדיוק שיתוף הפוטנציאל. ומשפט קדם ראוי.

שינוי משקל נאש מתקבל באמצעות משתנה או הפוטנציאל.

ומעיה min-cost flow עם אפילו אפילו הכתוב פולינומיאלית.

השיעור הבא נראה שיש צורך בכונה מסוימת של פרופיל

שהוא מניח את הפרופיל של s רצי אפילו אפילו הכתוב פולינומיאלית.