(18) 22/11/09
תמה
וחישוב

הערה לבודקים: על כל שאלה נותנים 0, 1 או 2. 2 זה אומר שבגדול זה נכון והבנו את העיקר אבל אולי יש פרטים קטנים לא מדויקים. 1 זה אם הבנו חלק משמעותי אבל יש גם חלק שלא הובן.
איך לבדוק? עושים סריקה של התשובות והערכה של איך לבדוק ואז לחזור לניירות ומיד להתייחס אותם.
אז נותנים את הניקוד ומחזירים לנו. הם ירצו לשנות אבל זה לא סביר.

הערה לסיכומים: נא להזדרז בשליחת הסיכומים.

כמה זמן לוקח למצוא ש"מ טהור?
ראינו הוכחה שבאופן כללי כדי להראות שאין שיווי משקל צריך לעבור רשימה של כל התאים במטריצה. אז עברנו לדבר על משחקי פוטנציאל.

משפט: כל אלגוריתם שמוצא ש"מ טהור במשחק פוטנציאל, תוך שימוש "בקופסה שחורה", דורש זמן מעריכי. בפרט, עבור $m=2$ נראה חסם תחתון של $\Omega(2^n)$.
[נניח אנחנו נמצאים בעולם שבו לכל n השחקנים יש שתי אסטרטגיות]
הוכחה: היריב תמיד יבחר $u_1=u_2=\dots=u_n=u$ וזו גם פונק' פוטנציאל לפי ההגדרה. אז כל האלגוריתם למצוא מקסימום לוקאלי של u. אז הלוגיקה היא שהיריב יענה שהערכים הם פשוט ערכים עולים ואז אי אפשר להכריז שמצאנו מקסימום כי כל פעם שעוברים לשכן מקבלים ערך גבוה יותר.
אז בתחילה האלגוריתם שלנו ירצה לנסות לבודד קודקודים.
הגדרה: יהי Q אוסף השאילתות עד כה. נגיד שקודקוד מוסגר (compromised) ע"י Q אם כל הקשתות של הקודקוד

מהיפר-קוביה לאחר שהורדנו כל קודקודי Q הוא בגודל קטן
מ- $\frac{2^n}{2}$.

היריב פשוט "יתן תשובות (יזכור לעצמו בראש) C ערכי תשובה
עולים על הקודקודים שהוסתרו בשאילתא מסוימת ~~מ~~אחר
מכן ערך עולה לשאילתא עצמה.

איך נותנים לאלה שהוסתרו ערכים כך שלא יווצר מקסימום לוקאלי?
נותנים את הערכים בסדר מהרחוק ביותר (מקודקוד השאילתא)
לקרוב ואז לא יכול להיווצר מקסימום לוקאלי.

טענה: האלגוריתם לא יכול לתת תשובה לפני שכל
הקודקודים נשאלו או הוסתרו.

זה ברור מהבנייה - תמיד השכנים שעד עכשיו אין להם
מקסימום לוקאלי כי הערכים הלכו וגדלו ולקודקודים
שהולכים להגיע אנחנו ממשיכים לתת ערכים גבוהים יותר.

כמה זמן זה נמשך?

אם Q קבוצת השאילתות ו- C קודקודים שהוסתרו אז
כל שכני C חייבים להיות ב- Q (או ב- C עצמה).
אנחנו רוצים ש- C יהיה כמה שיותר גדול ו- Q כמה
שיותר קטן. ונניח שזה קורה כשב- C יש את
כל הקודקודים שיש בהם לכל היותר k 1-ים וב- Q
יש את הקודקודים שיש בהם k+1 1-ים. כלומר

$$|C| = \sum_{\ell=0}^{k}\binom{n}{\ell}, \quad |Q| = \binom{n}{k+1}$$

למה: לכל קבוצה C בגודל $\ge \frac{2^n}{2}$, קבוצת שכניה גדולה
או שווה ל- $|C|/\sqrt{n}$.

אז יש לנו

$$\begin{cases}|C| \le |Q|\sqrt{n} \\ |C| + |Q| \ge \frac{2^n}{2}\end{cases} \Rightarrow |Q| \ge \Omega\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$$

וזה זמן הריצה המינימלי שהאלגוריתם יכול לעבוד.

<u>קלט</u>: תיאור קדר של משחק

<u>פלט</u>: שמ"ט טהור של המשחק או להגיד שאין כזה.

אבל מה זה תיאור קדר של משחק? אנחנו רוצים להחליף את הקופסה השחורה הדימיונית שלנו. אז התיאור "יתן" ז"י קוד בשפת מחשב שמחשב את הפונקציה.

אנחנו נניח גם שהפונקציה יעילה (פולינומיאלית).

אנחנו נניח גם שהקוד של הפונקציה רוצ נתונים מובלעים (למשל אם n גדול יותר סביר שהפונקציה תהיה ארוכה יותר). אפשר לחשוב על זה כאילו כל הנתונים הם hard-coded בקוד.

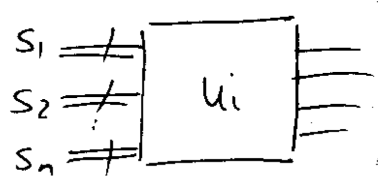
אז תיאור קדר של משחק הוא מעגל בוליאני שמחשב את הפונקציה. (עם שערי ה,ו,)

ידוע שאם יש קוד שמחשב משהו, אפשר לבנות חומרה פולינומיאלית עם זיכרון פולינומיאלי ומחשבת את אותה הפונקציה בגודל פולינומיאלי.

כמובן, להפך אם יש לנו חומרה כזאת אז אפשר לסמלץ אותה בתוכנה. לכן אנחנו יכולים להניח שהקלט שלנו הוא מעגל בוליאני.

איך מעגל כזה נראה?

לכל bus קלט יש $\log m$ ביטים.



t ביטים לפלט

אז הקלט הוא n מעגלים, כל אחד עם קלט של $n \cdot \log m$ ביטים ופלט של t ביטים.

אז מבחינת הקוד אפשר כמובן להשתמש בכל מה שעשינו קודם ולהשתמש בקוד בדיוק באותו אופן כמו עם הקופסה השחורה. אבל אולי הסתכלות בקוד יכולה לתת לנו מידע נוסף?

<u>משפט</u>: בעיית ההכרעה (אם יש שמ"ט או לא) היא NP-שלמה.

<u>הוכחה</u>: זה ב-NP: ננחש את השיווי משקל ואז בשימוש במעגל

אפשר לבדוק את 5 השכנים ולוודא שזה באמת ש"מ.

למה זה NP-שלם? נעשה רדוקציה מ- 3-SAT.

<u>תזכורת</u>: 3-SAT יש פסוק מהצורה - קוניונקציה של דיסיונקציות מאורך 3:

$$(o \vee o \vee o) \wedge (o \vee o \vee o) \wedge \ldots$$

כאשר o זה משתנה או שלילתו.

והשאלה היא אם יש השמה מספקת.

אנחנו רוצים איכשהו לקשר את זה למשחק.

$u_I = \begin{cases} 1 & \text{פסוקית מסתפקת} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ כל שחקן הוא פסוקית!

נוסיף עוד סוגי שחקנים - לכל משתנה מתאים שחקן ויש לו שתי אסטרטגיות - 0 או 1. והתועלת של השחקנים האלה היא תמיד 1 (לא רלוונטיות בפרופיל)

לכל השחקנים יש תועלת 1 אמ"מ יש השמה מספקת.

אבל אותנו מעניין ש"מ. אנחנו רוצים שאם כולם שמחים אז יש ש"מ ואחרת אין ש"מ.

נשנה את התועלת של שחקני הפסוקיות:

$u_I(s_I, s_{-I}) = 1 \iff$ הפסוקית מסתפקת

ונוסיף עוד שני שחקנים. A,B כך ש-

u_A, u_B:
- אם כל שחקני הפסוקים משחקים 1 $\Rightarrow$ A,B מרוצים $u_A = u_B = 1$
- אחרת $\Rightarrow$ A,B ישחקו זוג או פרט (שאין לו ש"מ).

ועכשיו ראינו שיש ש"מ נאש אמ"מ יש השמה מספקת, וזה מה שרצינו.

☺