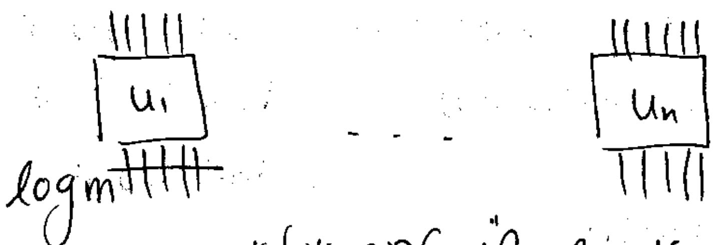
(20) 29/11/09
טבע וחישוב

מנהלות
- תרגיל חדש יתפרסם היום. הגשה - בעוד שבועיים
- בודק תרגילים - נא להגיע לנועם ומיר רק לאחר תיאום.

שבוע שעבר דיברנו על מצב שבו פונק' התועלת של G שחקן נתונה ע"י מעגל חישובי (שאנחנו יודעים את המימוש שלו אבל פרקטית קשה להאמין שאפשר להסיק מהמימוש משהו מועיל).
אז הקלט הוא



והפלט צריך להיות אם יש ש"מ טהור או לא.
עשינו רדוקציה לבעית 3-SAT רק שיש ש"מ במשחק שלנו אמ"מ יש השמה מספקת לנוסחה. ובכך הוכחנו שהבעיה היא NP-שלמה. חשוב: הבעיה בייצוג שבחרנו היא NP-שלמה.

משחק בייצוג גרפי

יש הרבה מקרים שבהם תועלת של שחקן תלויה רק במה שחלק קטן מהשחקנים עושה. במקרה זה אפשר להקטין את הייצוג של המשחק.
- נתון גרף G בין השחקנים.
- פונקצית התועלת של שחקן i תלויה רק בפעולות שלו ושל שכניו בגרף.
- בייצוג מספיק לתאר את פונקצית התועלת של שחקן i כטבלה בגודל m^{d_i+1} כאשר d_i מספר השכנים של i בגרף.

אז עכשיו אפילו אם יש הרבה שחקנים סה"כ יכול להיות שהייצוג יהיה קטן והוא גם מאוד טבעי.

מה הקושי של הבעיה בזיווג הזה?

- אם G השחקנים תלויים בכולם אז הקלט הוא בגודל מעריכי ואז אנחנו במצב טוב - נעבור על כל האפשרויות וזה פולינומיאלי בקלט. (השיטה הזאת לא עובדת בזיווג הקודם כי הזיווג שם קטן יותר...)
- אם הדרגה של כולם היא 1 אז גם קל לראות שאפשר לפתור את זה. כי למעשה הגרף נראה כך:

וצריך פשוט להסתכל על הזוגות בנפרד.
- אם הגרף הוא עץ אנחנו נוכיח בתרגיל שאפשר לפתור את זה בזמן פולינומיאלי.

נראה שאם הדרגה של הקודקודים היא לכל היותר 3 אז זה NP-שלם.
אם כן, נעשה רדוקציה ל- 3-SAT.

$$(x_1 \vee \bar{x}_7 \vee x_8) \wedge (x_1 \dots) \wedge \dots \wedge (x_{17} \vee x_{19} \vee \bar{x}_1)$$

גם כאן יש לנו שחקנים (משתנים) אבל צריך שבשיווי משקל בכל מקום שיש x_i השחקנים ישחקו את אותו הערך.
אז נעשה זוג שחקנים שיחברו את כל ה-x_i-ים ביחד ויוודאו שהערך שלהם תמיד זהה.
אז כל שחקן משתנה תלוי בשחקן אחד.
כל שחקן פסוקית תלוי בשני שחקנים.
ויש לנו את השחקנים A ו-B שקודם רצינו שיהיו תלויים בכולם. אז פשוט נוסיף עוד שחקני AND שיוצרים שרשרת. שחקן AND_2 שמח אם שחקן פסוקית 1 ושחקן פסוקית 2 שמחים. ורק הלאה AND_{i+1} שמח אם שחקן AND_i ושחקן פסוקית i+1 שמחים. רק למעשה A ו-B תלויים רק ב- AND_n. והמשך כמו שיעור שעבר.

<u>משפט</u>: בעיית ההכרעה של קיום ש"מ טהור במשחק גרף מדרגה 3 היא NP-שלמה.

<u>משחק עומס</u>: יש גרף עם בעל פונק' עומס. לכל שחקן קודקוד מקור וקודקוד מטרה. פונקציות עומס מוגדרת ע"י n מספרים - המחיר בעומס 1, המחיר בעומס 2 וכן הלאה.
מה הסיבוכיות החישובית של משחק מסוג כזה? האם יש אלג' פולינומיאלי שאומר אם יש ש"מ? כן! האלגוריתם פשוט תמיד אומר שכן (כי זה משחק פוטנציאל). אבל האם אפשר למצוא את הש"מ?

<u>קלט</u>: מעגלים שמחשבים את פונק' התועלת של n שחקנים במשחק פוטנציאל
<u>פלט</u>: שיווי משקל טהור של המשחק

ש"מ במשחק כזה מתקבל במקסימום מקומי של פונק' הפוטנציאל.
הבעיה הזו אכן שקולה למציאת מקס' מקומי של פונק' הפוטנציאל.

נניח שיש לנו פונק' פוטנציאל. איך מוצאים מקסימום מקומי?
נניח שיש פונקציה $f(x,y)$. בהינתן x, איך נמצא y רק ש-$f(x,y)>0$.
זה בעיית NP. מנחשים y ומוודאים. זה אותו דבר כמובן לגבי בעיה $f(x,y) > c$ עבור c קבוע כלשהו.
אם נרצה y שנותן מקסימום? זאת בעיה קשה יותר.
ואם נרצה y שנותן מקסימום מקומי? בעיה זו שייכת למחלקה נקראת בשם PLS (Polynomially local search). אם יש לנו פתרון כלשהו אנחנו ננסה להזיז קצת בסביבה ולראות אם שיפרנו. זה בסוף יביא אותנו למקסימום <u>מקומי</u> לא גלובלי. האלגוריתמים האלה הם לא פולינומיאליים אבל פרקטית זה בד"כ עובד טוב.

<u>משפט</u>: מציאת ש"מ טהור במשחק פוטנציאל הוא בעיה PLS-שלמה.

<u>משפט</u>: מציאת ש"מ במשחק עומס תשפי היא PLS - שלמה.
אנחנו לא נוכיח. זה שזה ב- PLS זה ברור כי זה מקרה פרטי של משחק פוטנציאל. רק להוכיח שזה PLS-קשה יש רדוקציה שכנראה לוקח קורס שלם לעשות אותה.

שיווי משקל מעורב

<u>משחק סכום אפס</u> בשני שחקנים הוא משחק שבו $u_2 = -u_1$.
משחק כזה אפשר לתאר במטריצה אחת שמייצגת רק את התועלת של השחקן הראשון (שזה ההפסד של השחקן השני).

עד עכשיו לא היה לנו אלמנט של זמן במשחקים. השחקנים בוחרים אסטרטגיה בו זמנית.
זה קורה גם במשחק סכום אפס. כן יש אלמנט של תור.

		L	R
Max	U	1	2
	D	3	0

Min

לשחקן ה- Max עדיף לשחק שני כי הוא יכול להתאים לעצמו את האסטרטגיה בהתאם למה שהראשון עושה. לכן שם האסטרטגיות שהשחקנים יבחרו הן

Max: $\arg\max_i \min_j a_{ij}$

min: $\arg\min_j \max_i a_{ij}$

<u>למה</u>: $\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$

<u>הוכחה</u>: מספיק להוכיח שלכל $\hat{i}, \hat{j}$ מתקיים

$$\min_j a_{\hat{i}j} \le \max_i a_{i\hat{j}}$$

וזה כמובן נכון כי

$$\min_j a_{\hat{i}j} \le a_{\hat{i}\hat{j}} \le \max_i a_{i\hat{j}}$$

הגדרה: נניח שלשחקן יש m אסט' טהורות אפשריות. אסט' מעורבת היא וקטור $x=(x_1,\dots,x_m)$ כאשר $x_i \ge 0$ לכל i ו- $\sum x_i = 1$.

נתבונן במטריצה שלנו.

	L	R
U	1	2
D	3	0

אם שחקן העמודות משחק אסט' מעורבת $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ושחקן השורות משחק U אז תוחלת התועלת שלו היא $1\frac{1}{2}$.
אנחנו בקורס הזה נניח שתמיד מה שמעניין את השחקנים הוא למקסם את תוחלת התשלום שלהם.

נניח ששחקן העמודות משחק אסט' מעורבת y ואנחנו יודעים שהתגובה במעורבת הטובה ביותר ל-y עבור שחקן 1 היא אסט' מעורבת שנותנת הסתברות חיובית ממש ל- $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$. אז בהכרח תוחלת התשלום של הבחירה הטהורה ב- i_1 שווה לתוחלת בכל השאר כי אחרת לא היה כדאי לתת הסתברות חיובית לבחירה עם התוחלת הנמוכה יותר. לכן, כל צירוף קמור של האסט' $i_1,\dots,i_k$ הוא גם תגובה טובה ביותר ל-y (כי זה ייתן את אותה תוחלת תשלום).

משפט המינמקס: (פון ניומן 1928): במשחק סכום 0

$$\max_x \min_j \sum_i x_i a_{ij} = \min_y \max_i \sum_j a_{ij} y_j$$

בגדול זה אומר שלשחקנים זה לא חשוב מה התור שלהם במשחק. תוחלת התשלום היא זהה בכל מקרה (אם השחקן השני יודע את האסט' המעורבת (לא מה שבסוף נבחר באמת) של השחקן הראשון

<u>הוכחה:</u> אנחנו מחפשים את

$$\max_x \min_j \sum_i x_i a_{ij}$$
$$s.t \quad \sum x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$

זה קדם מזכיר בעית תכנון לינארי. אלא ש- min זו לא פונק' לינארית. בעיה שקולה לה אך לינארית היא

$$(*) = \quad \begin{array}{l} \max \ c \\ s.t \quad c \leq \sum x_i a_{ij} \ \ \forall j \\ \quad\quad x_i \geq 0 \ \ \forall i \\ \quad\quad \sum x_i = 1 \end{array}$$

באופן דומה עבור שחקן העמודות אנחנו רוצים לפתור את

$$\begin{array}{l} \min_y \max_i \sum_j a_{ij} y_j \\ s.t \quad \sum y_j = 1 \\ \quad\quad y_j \geq 0 \ \forall j \end{array} \xrightarrow{\text{שגה כמו}} (**) = \begin{array}{l} \min \ d \\ s.t \quad d \geq \sum_j a_{ij} y_j \ \forall i \\ \quad\quad \sum y_j = 1 \\ \quad\quad y_i \geq 0 \ \forall j \end{array}$$

ואנחנו רוצים להראות ש- $(*) = (**)$.

נתבונן בבעיה

$$(***) \quad \begin{array}{l} \max \sum x_i \\ s.t \quad \sum x_i a_{ij} \geq 1 \ \ \forall j \\ \quad\quad x_i \geq 0 \ \ \forall i \end{array}$$

אפשר לראות שהאופטימום של $(*)$ שווה להופכי של האופטימום של $(***)$