(31) 24/12/09
כלכלה וחישוב

מנהלות:

- תרגיל 3 פורסם. קצת כבד...
- שימו ♥ לשינויים בהקצאות של בדיקת תרגילים.
- הבודקים של תרגיל 1 מתבקשים להחזיר את התרגילים.

ש"מ מעורב

אסט' מעורבת של שחקן i היא וקטור הסתברויות $(x_1,\dots,x_{m_i})\in\Delta^{m_i}$ שאומר באיזו הסתברות השחקן משחק כל אסט' טהורה שלו.

הרחבנו את ההגדרה של פונק' התועלת לאסט' מעורבות:

$$u_i(x^1,\dots,x^n)=\mathbb{E}_{\substack{s_1\sim x^1\\ \vdots \\ s_n\sim x^n}}\left[u_i(s_1,\dots,s_n)\right]$$

והגדרנו ש"מ (נאש) - $(x^1,\dots,x^n)$ ש"מ מעורב אם x^i תגובה טובה ביותר ל-x^{-i} לכל i.

טענה: אסט' x^i מעורבת הינה תגובה טובה ביותר אמ"מ כל אחת מהאסט' הטהורות בתומך שלה הינה תגובה טובה ביותר.

החולשה העיקרית של הדבר הזה הוא שמדובר פה רק על התפלגויות ולא על ריאליזציות ספציפיות.

הערה לטענה: אם אסט' טהורות של שחקן 1 הן תגובות טובות ביותר לאסט' מעורבת של שחקן 2 זה לא אומר שהאסט' המעורבת של שחקן 2 היא תגובה טובה ביותר לכל אחת מהאסט' הטהורות של שחקן 1 - היא תגובה טובה ביותר רק לאסט' המעורבת שלו.

החוזק העיקרי של ש"מ מעורב הוא שניתן להוכיח (משפט נאש) שתמיד קיים ש"מ מעורב, בניגוד לש"מ טהור שראינו משחקים שאין בהם כזה.

הוכחת הטענה:

(⇐) אם היתה אסט' אחת שהיא לא תגובה טובה ביותר היה עדיף לו לא לשחק אותה בכלל ולחלק את ההסתברות שלה בין אסט' אחרות.

(⇒) אם כל הטהורות תגובות טובות ביותר אז בוודאי σ התפלגות עליהן והיא תגובה טובה ביותר. ☺

מסקנה: אם יש לנו אסט' מעורבת ורוצים לבדוק אם היא תגובה טובה ביותר מספיק לבדוק אם היא יותר טובה רק מאסט' טהורות וזה מאוד מאוד חשוב כי זו כמות סופית של בדיקות.

דוגמה:

	q	$1-q$
p	2,1	0,0
$1-p$	0,0	1,2

(2,1) ו- (1,2) הם ש"נ טהורים.

נחפש ש"נ מעורב שבו שני השחקנים מערבבים ממש.

מהטענה שלנו זה אומר ש-

$$2q = 1-q \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$p = 2(1-p) \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

אם שחקן 1 משחק $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ ושחקן 2 משחק $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ אז זהו ש"נ באסט' מעורבות. לא צריך לבדוק לגבי סטייה לאסט' טהורות כי אין רווח לאן לסטות שהרי שני השחקנים מערבבים ממש.

משפט נאש: בכל משחק סופי (מספר שחקנים סופי ומרחב אסט' טהורות סופי לכל שחקן) קיים ש"נ נאש מעורב.

הוכחה: נשתמש במשפט בראואר: תהי C קבוצה קומפקטית וקמורה ב- R^t ותהי $f: C \to C$ פונק' רציפה.

אזי קיימת נק' $x \in C$ כך ש- $f(x)=x$ (נק' שבת).

אנו חוזרים לדיון במשפט נק' השבת.
ב-$\mathbb{R}^n$ שם ההוכחה ממש מסובכת. אבל ב-$\mathbb{R}$
זה למעשה משפט ערך הביניים.
כל תנאי המשפט דרושים:

- אם הקבוצה לא קמורה - נסתכל רק על שפת מעגל ב-$\mathbb{R}^2$ ונסובב אותה ב-90°. אין שום נקודה שנשארת באותו מקום.
- אם הקבוצה לא סגורה - נסתכל על $f:(0,1)$ המוגדרת ע"י $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{2}$. היא רציפה אבל אין לה נק' שבת. כי אם $\frac{1}{2}+\frac{x}{2}=x \Rightarrow x=1$ וזה מחוץ ל-$(0,1)$.
- אם הקבוצה לא חסומה זה בוודאי לא נכון. נתבונן ב-$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x+1$.

כעת נוכל להוכיח את משפט נאש. נתבונן ב-$G=\Delta m_1\times\ldots\times\Delta m_n$
קל להשתכנע שזו קבוצה קמורה וקומפקטית. נגדיר
עליה $f:G\to G$ באופן הבא.
נסמן ב-x^i_j את המשקל של אסט' j מהתפלגות x^i.
נגדיר $d^i_j=u_i(j,x^{-i})-u_i(x^i,x^{-i})$
זה אומר כמה השחקן i היה מרוויח אם היה משחק j במקום האסט' המעורבת x^i (בהינתן שהאחרים לא משנים אסט').
ונגדיר $d^{i+}_j=\max(d^i_j,0)$

$$\hat{x}^i_j=\frac{x^i_j+d^{i+}_j}{1+\sum_j d^{i+}_j}$$

זה מגדיר התפלגות תקנית חדשה לכל שחקן. אז זו פונק' מ-G ל-G והיא רציפה כי היא מורכבת מפונקציות רציפות.
$\Leftarrow$ עפ"י משפט בראואר יש לה נק' שבת.
נראה שבנקודת שבת זו למעשה נק' ש"מ מעורב. מספיק

והראינו שבנק' $f(x)=x$ מתקיים $d_j^i = 0$ לכל
i,j כי זה אומר ש- x^i היתה תגובה טובה ביותר,
שהרי אף סטיה מועדפת לא עזרה לו.

אז נניח בשלילה שקיימים i,j כך ש- $d_j^i > 0$. אז
$d_j^{i+} > 0 \Rightarrow \hat{x}_j^i > 0$ אבל $x_j^i = \hat{x}_j^i > 0$
כי זו נק' שבת. מתקיים $\sum_j d_j^i x_j^i = 0$ ולכן חייב
להיות j' שעבורו $x_{j'}^i > 0$ ו- $d_{j'}^i < 0$. אבל

$$\hat{x}_{j'}^i = \frac{x_{j'}^i + \overset{=0}{d_{j'}^{i+}}}{\underbrace{1+\sum_j d_j^{i+}}_{>1}} < x_{j'}^i$$

וזו סתירה כי אנחנו בנקודת שבת. ☺

כמה קשה למצוא ש"מ? נקשר את הבעיה ל- SAT

נתבונן בנוסחה $\phi=(x_1\vee\neg x_2)\wedge(\neg x_1\vee x_2)$ ונגדיר לה משחק
$G(\phi)$ - משחק סימטרי של שני שחקנים:

$-2 = -n$ כאשר n מספר המשתנים

		x_1	x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1\vee\neg x_2$	$\neg x_1\vee x_2$	f
V	x_1	-2	-2	0	0	2	2	-2	-2	-2
	x_2	-2	-2	2	2	0	0	-2	-2	-2
L	$+x_1$	-2	-2	1	-2	1	1	-2	-2	-2
	$-x_1$	-2	-2	-2	1	1	1	-2	-2	-2
	$+x_2$	-2	-2	1	1	1	-2	-2	-2	-2
	$-x_2$	-2	-2	1	1	-2	1	-2	-2	-2
C	$x_1\vee\neg x_2$	-2	-2	0	2	2	0	-2	-2	-2
	$\neg x_1\vee x_2$	-2	-2	2	0	0	2	-2	-2	-2
	f	1	1	1	1	1	1	1	1	0

אז $K(N)$ את התשלומים לשחקן 1 ומהסימטריות יודעים שהתשלומים לשחקן 2 הם המטריצה המשוחלפת

אפשר להכליל את הטבלה הזאת לכל נוסחה ϕ.

<u>משפט</u>: אם $(l_1,\dots,l_n)$ מספק את ϕ,
אזי קיים ש"מ (נוסף) של $G(\phi)$ שבו שני השחקנים
משחקים כל l_i בהסתב' $\frac{1}{n}$
הש"מ הנוסף היחיד הוא (f,f)

מהמשפט הנה אפשר להסיק שכל מיני בעיות שקשורות לש"מ
הן NP-קשות. למשל, אילו ידענו לבדוק אם במשחק
סימטרי בשני שחקנים יש שני ש"מ אזי היינו יודעים לפתור SAT.

(33)

<u>הוכחה</u>: נניח ששחקן 2 משחק לפי האסט' שבה l_i מהסתב' $\frac{1}{n}$. אם שחקן 1 משחק את אחד ה-l_i-ים האלה הוא מקבל 1. נראה שאף אסט' אחרת לא יכולה לתת לו יותר מ- 1. אם הוא ישחק שלילה של אחד מהם עליו הוא יקבל -2 ועל השאר 1 אז זה לא משתלם.

אם הוא משחק אסט' מ- C אחד מהליטרלים חייב להופיע שם ובהסתב' $\frac{1}{n}$ מקבלים n-2. אז התשלום הוא בגלל שזו מסופקת

$$\frac{1}{n}(2-n)+\frac{n-1}{n}\cdot 2 = 1$$

אז גם לא כדאי לעבור.

באותו אופן לא כדאי לסטות לאסט' מ- V

ואם סטים ל-f גם מקבלים 1 וזה לא משתלם.

אז אכן זו תגובה טובה ביותר. מהסימטריה זה אותו דבר גם לשחקן 1 ולכן זה ש"מ נאש.

המשך שבוע הבא...

נא לחשוב מבית למה (f,f) זה הש"מ השני <u>היחיד</u>.