סוו 14/11 )
סמה חישוב

תזכורת:

$m$ פעולות אפשריות

וקטור הפסדים $l^t$ בכל שלב $t=1,\dots,T$

כך $l_i^t\in\{0,1\}$ $l^t=(l_1^t,\dots,l_m^t)$

האלג' שלנו בוחר התפלגות $p^t=(p_1^t,\dots,p_m^t)$ ומקבל

הפסד $\sum_{i=1}^{m} p_i^t l_i^t$.

סך ההפסד הוא $L_*^T=\sum_{t=1}^{T} l_*^t$

האלגוריתם רוצה שיהיה לו כמה שפחות הפסד מול יריב ט-ירול.
היריב יודע את ההתפלגות שלנו אבל לא את תוצאת הדגימה ממש.
אנחנו מעוניינים להשיג $L_*^T=o(T)$ ואז בממוצע
במעבר משלב לשלב ההפסד הוא אפס.

חרטה חיצונית של אלג' היא $R$ אם $L_*^T-L_j^T\le R$
כאשר $L_j^T$ מתקבל מאלג' שבוחר פעולה $j$ בכל $t=1,\dots,T$

חרטה פנימית של אלג' היא $R$ אם $L_*^T-L_F^T\le R$
כאשר $L_F^T$ מתקבל מאלג' שמשחק $F(k)$ כאשר $A$
משחק $k$ ( $F:\{1,\dots,m\}\circlearrowleft$ ).

טענה: כל אלג' מול יריב ט-ירול לא יכול לתת חרטה טובה יותר
מ- $T(1-\frac{1}{m})$

הוכחה: צריך להראות יריב שלכל התפלגות של האלגוריתם שלנו מביא
לנו הפסד $T(1-\frac{1}{m})$ לאורך $T$ התקופות.
אז היריב בכל $t$ ייתן הפסד $0$ לפעולה עם ההסת' הנמוכה
ביותר והפסד $1$ לכל שאר הפעולות. ההפסד שלנו יהיה לכל
הפחות $T(1-\frac{1}{m})$ משום שבכל שלב ההסתברות לשחק רק
שההפסד הוא $0$ היא לכל היותר $1-\frac{1}{m}$ (כי זו ההסתברות
הכי נמוכה).

# אלג' עם חרטה חיצונית נמוכה

ניסיון ראשון: בכל שלב נבחר פעולה שנתנה לנו עד כה הפסד מינימלי ונשבור לכיוון פעולה עם אינדקס נמוך.

initialize: $x^1 = 1$

for all t: $L^{t-1}_{min} = \min_{i\in[m]} L_i^{t-1}$

$$S^{t-1} = \{i : L_i^{t-1} = L^{t-1}_{min}\}$$

$$x^t = \min S^{t-1}$$

משפט: האלגוריתם הזה נותן $L^T_* \le m L^T_{min}$ כאשר $L^T_{min}$ ההפסד הכי נמוך שאנחנו יכולים לקבל ע"י פעולה קבועה.

הוכחה: בכל שלב $t$ שבו האלג' שלנו הפסד $1$ ; $L^T_{min}$ לא עולה ב-$1$, הקבוצה $S^t$ קטנה לפחות בפעולה אחת. לכן בין כל שתי עליות של $L^T_{min}$ האלג' שלנו עלה לכל היותר $m$.

משפט: כל אלגוריתם דטרמיניסטי משיג חרטה חיצונית של לפחות $m$.

הוכחה: היריב יתן תמיד לפעולה שלנו בכל שלב הפסד $1$ ; $0$ לכל שאר הפעולות. חייבת להיות פעולה שהאלגוריתם שלנו שיחק לכל היותר $\lfloor T/m \rfloor$ פעמים. האלג' שמשחק את הפעולה הזאת תמיד מקבל הפסד $\frac{T}{m}$ והאלג' שלנו מקבל הפסד $T$, זה פקטור של $m$.

שיפור של הניסיון הראשון: במקום לשבור שוויונים באופן דטרמיניסטי נבחר כל פעם באופן רנדומלי מתוך $S^{t-1}$. לא נעשה את הניתוח אבל זה נותן חסם של $\log n$.

# Randomized Weighted Majority

initialize: $w_i^1 = 1 \quad p_i^1 = \frac{1}{m} \quad \forall i \in [m]$

for all t: if $l_i^{t-1} = 1$, $w_i^t = w_i^{t-1}(1-\delta) \qquad 0<\delta<1$

else (i.e. $l_i^{t-1}=0$), $w_i^t = w_i^{t-1}$

$p_i^t = \frac{w_i^t}{W_*^t}$ where $W_*^t = \sum_{i\in[m]} w_i^t$

האינטואיציה היא שאנחנו רוצים להגדיל את מספר הפעולות שניגשים אליהן אבל אנחנו לא רוצים שהגישה תהיה אחידה. כך שפעולה תווה יותר הפסד (ני) מקבלת פקטור נמוך יותר.

<u>משפט</u>: עבור $\delta \le \frac{1}{2}$ מתקיים $L_*^T \le (1+\delta)L_{min}^T + \frac{\ln m}{\delta}$

<u>הערה</u>: עבור $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{\ln m}{T}}\}$ נקבל $L_*^T \le L_{min}^T + 2\sqrt{T\ln m}$

וזה החסם הכי קטן שאנחנו יכולים להשיג.

<u>הוכחה</u>: כל העניין הוא ש-

$$W_*^{T+1} \ge \max_{i\in[m]} w_i^{T+1} = (1-\delta)^{L_{min}^T}$$

כי $W_*^{T+1}$ הוא הסכום

כי פעולה עם הפסד
כזו של L תקבל משקל $(1-\delta)^L$ עפ"י האלג'
ולכן המשקל המקסימלי מתקבל מהפעולה שקיבלה הפסד
מספר מינימלי של פעמים.

נגדיר $F^t = \sum_{i:l_i^t=1} w_i^t / W_*^t$ - זה החלק מתוך $W_*^t$ של פעולות שמקבלות הפסד 1. זה למעשה תוחלת ההפסד של האלג' שלנו בשלב t.

לפי ההגדרה מתקיים

$$W_*^{t+1} = (1-F^t)W_*^t + F^t W_*^t(1-\delta) =$$

$$= W_*^t(1-\delta F^t)$$

אז המשקל הכולל יורד בצורה פרופורציונית להפסד של האלג' שלנו.

ולכן,

$$(1-\delta)^{L_{min}^T} \le W_*^{T+1} = W_*^1 \prod_{t=1}^{T}(1-\delta F^t) \underset{W_*^1=m}{=} m\prod_{t=1}^{T}(1-\delta F^t)$$

וניקח log ונקבל

$$L_{min}^T \ln(1-\delta) \le \ln m + \sum_{t=1}^{T}\ln(1-\delta F^t)$$

ע"י מניפולציות אלגבריות נקבל

$$L^T_{min}\ln(1-\delta) \le \ln m - \sum_{t=1}^{T}\delta F^t =$$

$\ln(1-z)\le \ln z$

$$= \ln m - \delta\sum_{t=1}^{T}F^t = \ln m - \delta\cdot L^T_*$$

$$\Rightarrow L^T_{min}\ln(1-\delta) \le \ln m - \delta L^T_*$$

$$\Rightarrow L^T_* \le \frac{-L^T_{min}\ln(1-\delta)}{\delta} + \frac{\ln m}{\delta} \le$$

$$\le (1+\delta)L^T_{min} + \frac{\ln m}{\delta}$$

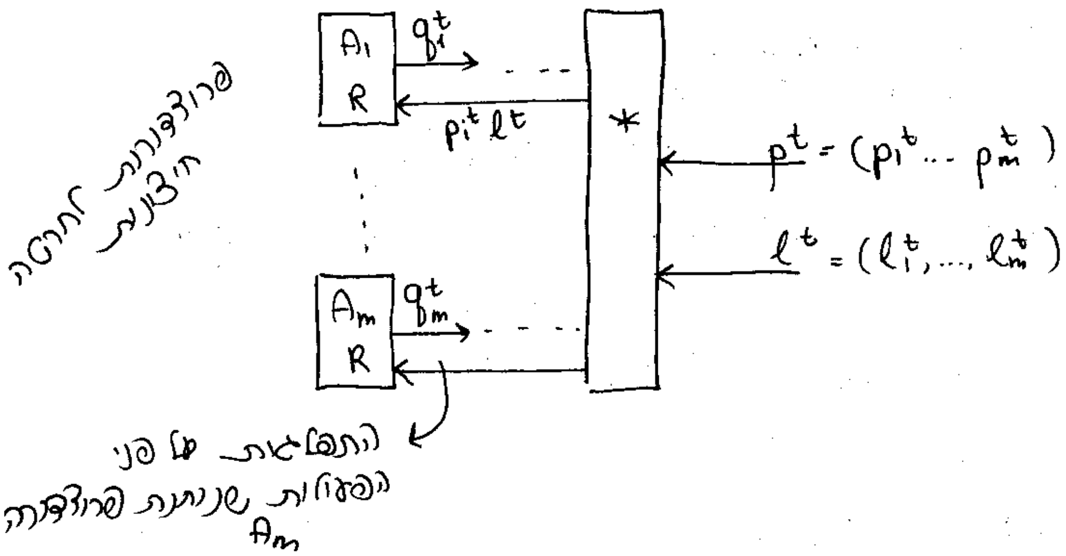
עבור $0\le z\le\frac{1}{2}$

$-\ln(1-z)\le z(1+z)$

וזה בדיוק מה שרצינו. ☺

משפט: בהינתן פרוצדורה שמבטיחה חרטה חיצונית $R$ הפרוצדורה שנראה מיד תבטיח $L^T_* \le L^T_{*,F} + mR$

האלג' שבוחר לפעולה
שנו $i$ את הפעולה $F(i)$




בהינתן וקטור הפסדים $l^t$ נחלק בין הפרוצדורות כך שפרוצדורה $A_i$ תקבל שבר $p_i$ מההפסדים.

<u>הוכחה:</u> נגדיר את $p$ באופן שיבטיח שסכום ההפסדים "המדומים" תהיה ההפסד האמיתי של האלגוריתם.

נזכור ש- $L^T_{A} = \sum_{t=1}^{T} l^t_{A} \le \sum_{t=1}^{T} l^t_j + R = L^T_j + R$

אנחנו מקבלים $q_{ij}^t$ לכל i לכל j. נמצא $p^t$ המקיים

$$p_j^t = \sum_i p_i^t q_{ij}^t$$ , כלומר

$$p^t = p^t \cdot \underbrace{Q^t}_{\text{מטריצה}}$$

כזה $p^t$ הוא ו"ע ימני של $Q^t$ (כי התפלגות סטציונרית של תהליך מרקוב שמוגדר ע"י $Q^t$).

בנוסף וקטור ההפסדים $\ell^t$, ההפסד של פרוצדורה $A_i$ הוא $p_i^t \ell^t$

אבל ההפסד של פרוצדורה $A_i$ יהיה

$$(p_i^t \ell^t) q_i^t = p_i^t q_i^t \ell^t$$

מכיוון של פרוצדורה מבטיחה חרטה חיצונית R מתקיים

$$\sum_{t=1}^{T} p_i^t (q_i^t \ell^t) \le \sum_{t=1}^{T} p_i^t \ell_j^t + R$$

לכן, אם נסכום את אגף שמאל

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} p_i^t (q_i^t \ell^t) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} p_i^t (q_i^t \ell^t) =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} p^t Q^t \ell^t = \sum_{t=1}^{T} p^t \ell^t = L_*^T$$

באופן דומה אם עכשיו סוכמים את אגף ימין לכל $i=1,\dots,m$ מקבלים בדיוק $L_*^T \le L_{*,F}^t + mR$.

# סוף